Tentamen Analyse op Variëteiten

27 juni 2011, 14:00-17:00 uur.

Dit tentamen bestaat uit **vier** opgaven. Per opgave is het maximaal aantal te behalen punten aangegeven. Je krijgt 10 punten gratis.

Opgave 1 (25 pt.)
Voor $0 < a < 1$ is $M_a \subset \mathbb{R}^4$ gegeven door

$$M_a = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1^2 + x_2^2 = a^2,\ x_3^2 + x_4^2 = 1 - a^2\}.$$

1. Toon aan dat M_a een twee-dimensionale deelvariëteit is van $\mathbb{R}^4$.
2. Bepaal een basis van T_pM_a, waarbij $p = (p_1, p_2, p_3, p_4) \in M_a$.
3. Laat $0 < a, b < 1$. Toon aan dat M_a en M_b diffeomorf zijn.

Opgave 2 (20 pt.)
We generaliseren het inproduct $\langle v, w\rangle$ en het uitproduct $v \times w$ van vectoren $v, w \in \mathbb{R}^3$ naar vectorvelden op $\mathbb{R}^3$, en wel als volgt. Voor $X, Y \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^3)$ definiëren we $\langle X, Y\rangle \in C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ door

$$\langle X, Y\rangle(x) = \langle X(x), Y(x)\rangle,$$

voor $x \in \mathbb{R}^3$, en $X \times Y \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^3)$ door

$$(X \times Y)(x) = X(x) \times Y(x),$$

voor $x \in \mathbb{R}^3$. Beschouw de afbeelding $i : \mathcal{X}(\mathbb{R}^3) \to \Lambda^1(\mathbb{R}^3)$ gegeven door $(i(X))(Y) = \langle X, Y\rangle$. Bewijs:

1. $i(\operatorname{grad} f) = df$
2. $i(X) \wedge i(Y) = \iota_{X\times Y}\Omega$, waarbij $\Omega = dx \wedge dy \wedge dz$.

Z.O.Z.

Opgave 3 (25 pt.)

1. Als ω en η exacte differentiaalvormen zijn, dan is $\omega \wedge \eta$ exact. Toon dit aan.

2. Toon aan dat op $\mathbb{R}^3$ de 2-vorm η, gegeven door

$$\eta = x\, dy \wedge dz + y\, dx \wedge dz,$$

exact is, en bepaal een 1-vorm σ met $\eta = d\sigma$.

3. Toon aan dat op $\mathbb{R}^n$ de $(n-1)$–vorm ω, gegeven door

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} x_i\, dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n \tag{1}$$

exact is dan en slechts dan als n even is.

4. Laat ω weer gegeven zijn door (1). Bepaal een $(n-2)$–vorm α op $\mathbb{R}^n$ met $\omega = d\alpha$ als

(i) $n = 2$,

(ii) $n = 4$.

Opgave 4 (25 pt.)

In deze opgave zijn de eenheidsbol en de eenheidssfeer in $\mathbb{R}^2$ gegeven door

$$\mathbb{B}^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}, \quad \mathbb{S}^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\},$$

en zijn de eenheidsbol en de eenheidssfeer in $\mathbb{R}^3$ gegeven door

$$\mathbb{B}^3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leq 1\}, \quad \mathbb{S}^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 1\}.$$

Uiteraard geldt $\mathbb{S}^1 = \partial\mathbb{B}^2$ en $\mathbb{S}^2 = \partial\mathbb{B}^3$.

1. Laat de 1-vorm η op $\mathbb{S}^1$ gegeven zijn door $\eta = -y\, dx + x\, dy$.
Bereken $\int_{\mathbb{S}^1} \eta$ op twee manieren:

(i) rechtstreeks, d.w.z., uit de definitie van integraal van een differentiaalvorm;

(ii) met behulp van de stelling van Stokes.

2. Laat de 2-vorm ω op $\mathbb{S}^2$ gegeven zijn door $\omega = x\, dy \wedge dz - y\, dx \wedge dz + z\, dx \wedge dy$.
Bereken $\int_{\mathbb{S}^2} \omega$ op twee manieren:

(i) rechtstreeks, d.w.z., uit de definitie van integraal van een differentiaalvorm. Je mag gebruiken dat de 2-sfeer het beeld is van een (orientatie-bewarende) singuliere 2-keten $c : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}^3$, gedefiniëerd door

$$c(u,v) = (\sin \pi u \, \cos 2\pi v, \; \sin \pi u \, \sin 2\pi v, \; \cos \pi u).$$

(ii) met behulp van de stelling van Stokes.

3. Toon aan dat η (als in onderdeel 1) en ω (als in onderdeel 2) gesloten zijn, maar niet exact.